

Zadanie 1. Wiedząc, że $z_1 = 1 + i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z) = az^3 + bz + 1$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ znajdź współczynniki a, b oraz pozostałe pierwiastki.

Zadanie 2. Wiedząc, że elementy zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z^4 = \pi \wedge \sqrt{3} \operatorname{Re} z = \left| \frac{\sqrt{2}+2i}{1-i} \right| \right\}$ są rozwiązaniami równania:

$$z^6 - 2z^5 + (4 + 3i)z^4 + (-4 - 6i)z^3 + (4 + 12i)z^2 - 12iz + 12i = 0$$

wyznacz pozostałe pierwiastki.

Zadanie 3.

a) Oblicz $\left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right)^6$.

b) Wiedząc, że $z_0 = \frac{(-2+2i)^{14}}{(\sqrt{3}-i)^{18}}$ jest pierwiastkiem, rozwiąż równanie:

$$z^3 + 5iz^2 + 28z + 32i = 0.$$

c) Przedstaw na płaszczyźnie zespolonej zbiór:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z^2 \leq \frac{\pi}{3} \wedge |z + 2 - i| < |z - 2 + i|\right\}.$$

Zadanie 4.

a) Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20 = 0$$

w dziedzinie zespolonej wiedząc, że $z = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań. Podaj wynik w postaci algebraicznej.

b) Niech $w_1 = -4 + 3i$, $w_5 = 4 - 3i$ będą przeciwległymi wierzchołkami ośmiokąta foremnego na płaszczyźnie zespolonej. Wykorzystując własności liczb zespolonych wyznacz postać algebraiczną liczb zespolonych odpowiadających pozostałym wierzchołkom tego ośmiokąta.

Zadanie 5.

a) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^3) < 0\}$,

b) Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $w(z) = (z^3 - (i - \sqrt{3})^6)(z^2 - i\sqrt{3}z - i)$.

Zadanie 6.

a) Niech $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\} \subset \sqrt[20]{5 + 12i}$. Przedstaw w postaci algebraicznej wartość wyrażenia:

$$\frac{|z_0|^{10} \cdot |iz_2|^{20}}{z_1^{20} + 3z_3^{20} + 4z_4^{20} + 5z_5^{20}}(5 - 12i).$$

b) Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 1|\}$ oraz $B = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} > 2\}$. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A \setminus B$.

Zadanie 7.

a) Rozwiąż równanie: $(\bar{z})^6 = -8z|z|\bar{z}$ stosując odpowiednią postać liczby zespolonej.

b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{4i-3}{3i-z} \right| \geq 5\right\}$.